ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kontinuumsmechanik
Serie 1

SS 05
Prof. M. Sigrist

Aufgabe 1.1 Variationsprinzip

Zeige, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für die klassische Feld $\vec{u}(x,t)$ durch:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{u}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial(\partial_x \vec{u})} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial(\partial_t \vec{u})} = 0 \qquad \text{(8 im Skript)}$$

gegeben ist. Wobei $L[\vec{u}, \partial_x \vec{u}, \partial_t \vec{u}] = T - V$ das Lagrange-Funktional ist.
Tips: Benutze die Variationsprinzip (siehe MMP) um die Wirkung $S[\vec{u}, \partial_x \vec{u}, \partial_t \vec{u}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx L$ zu extremieren, d. h. $\delta S / \delta \vec{u} = 0$.

Aufgabe 1.2 Punktkräfte auf einer elastischen Saite

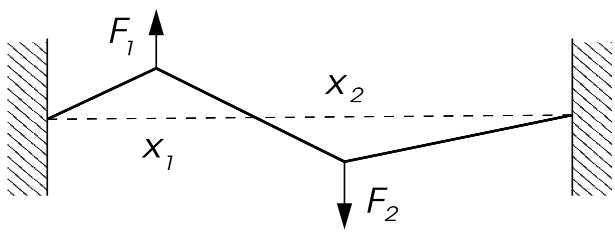
Wir betrachten eine elastische Saite, die transversen Punktkräften ausgesetzt ist. Dabei beschränken wir uns auf die statische Situation. Das Funktional für die potentielle Energie ist:

$$V[\vec{u}, \partial_x \vec{u}] = \int dx \left[\frac{\tilde{K}}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{\tilde{K}'}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}_\perp}{\partial x} \right)^2 - \vec{F} \cdot \vec{u} \right] \tag{1}$$

In der Vorlesung haben wir das Problem einer Punktkraft analysiert. Hier betrachten wir zwei Punktkräfte:

$$\vec{F}(x) = \vec{F}_1 \delta(x - x_1) + \vec{F}_2 \delta(x - x_2) \qquad \vec{F} \perp x\text{-Achse} \tag{2}$$

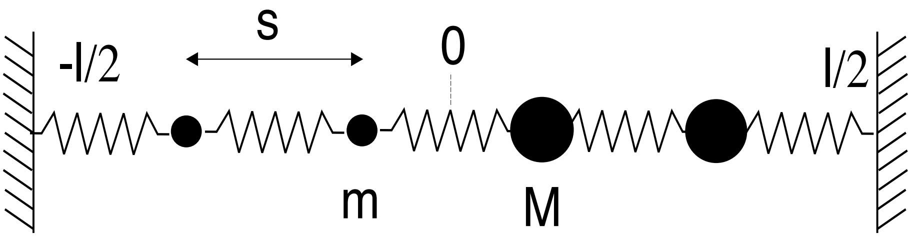
und $0 < x_1 < x_2 < l$ (l: Länge der Saite). Bestimme die Auslenkung der Saite. Berechne aus dem Funktional der potentiellen Energie die "Wechselwirkung" und die "Kraft", die zwischen den beiden Punkten wirkt (Wechselwirkungspotential: potentielle Energie der Gesamtkonfiguration abzüglich der Selbstenergien). (Bild: die Ansatzpunkte der beiden Kräfte sind beweglich, z.B. zwei Hochseiltänzer).



Tip: Die Variationsgleichungen sind linear in $\vec{u}$. Superpositionsprinzip.

Aufgabe 1.3 Inhomogene elastische Saite

Betrachte die Schwingungen einer Federkette mit Massepunkten unterschiedlicher Masse:



Wir beschränken uns auf longitudinale Auslenkungen, d.h. $\vec{u}_\perp = 0$. In diesem Fall lautet der *Kontinuumslimes* der Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} - \frac{\rho(x)}{K}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{mit} \qquad \rho(x) = \begin{cases} \rho_1 = m/s & \text{für } x \in [-l/2, 0[\\ \rho_2 = M/s & \text{für } x \in]0, l/2] \end{cases} .$$

Löse die Bewegungsgleichung durch Variablenseparation, d.h $u(x,t) = A(x)B(t)$. Benutze die Randbedingungen $u(\pm l/2) = 0$ und die Stetigkeitsbedingungen $\lim_{x\to 0+} u(x) = \lim_{x\to 0-} u(x)$, $\lim_{x\to 0+} \partial_x u(x) = \lim_{x\to 0-} \partial_x u(x)$ um zu zeigen, dass die Frequenzen der Eigenschwingungen ω_n Lösungen der Gleichung:

$$\sqrt{\rho_2}\tan\left(\sqrt{\frac{\rho_1}{K}}\frac{L}{2}\omega_n\right) = -\sqrt{\rho_1}\tan\left(\sqrt{\frac{\rho_2}{K}}\frac{L}{2}\omega_n\right)$$

sind. Bestimme die entsprechenden Eigenfunktionen $A(x)$ und $B(t)$.